$r)\, d\lambda_n(x) < +\infty$ *puis en*

$= x - y$. *Montrer que* Φ
variable pour justifier que

$$\frac{5n^2+100n+17}{14n+6n^2+3} = \frac{\frac{5n^2+100n+17}{n^2}}{\frac{14n+6n^2+3}{n^2}} = \frac{5+\cancel{\frac{100}{n}}+\cancel{\frac{17}{n^2}}}{\cancel{\frac{14}{n}}+6+\cancel{\frac{3}{n^2}}} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{5}{6}$$

Tu dois diviser le nominateur et le donominateur par la plus grande puissance n

$a_n \to a$
$b_n \to b$
$a_n \cdot b_n \to a \cdot b$
$a_n + b_n \to a+b$
$a_n / b_n \to a/b$

Théoreme de suite

EXERCICE 2

Soit l'espace mesuré $(\mathbb{N}^*, \mathcal{P}(\mathbb{N}^*), \mu_C)$ *(mesure de comptage). On considère les fonctions* $f(k) = \frac{1}{k^2}$ *et pour tout* $n \geq 0$ *et pour* n *entier,* $f_n(k) = \frac{n^2-27n+k}{(k+n^2)k^2}$ $= \frac{1-\cancel{\frac{27}{n}}+\cancel{\frac{k}{n^2}}}{\cancel{\frac{k}{n^2}}+1} \cdot \frac{1}{k^2} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{1}{k^2}$

1. *On considère* k *fixé, montrer que la suite* $f_n(k) \to f(k)$ *quand* $n \to +\infty$*. Interpréter ceci en termes de convergence simple.*
2. *La suite* (f_n) *est-elle croissante ?*
3. *Montrer qu'il existe* M *tel que pour tout* $(n,k) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$

$$\left|\frac{n^2-27n+k}{(k+n^2)}\right| \leq M$$

$\frac{k+n^2}{n^2}$

4. *En déduire que l'on peut appliquer le théorème de convergence dominée et en déduire que*

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{n^2-27n+k}{(k+n^2)k^2} \to_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \tag{1}$$

Théorème de convergence dominée

$f_n \to f$

majorant

$\exists g \in \mathcal{L}^1 : |f_n| \leq g \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$$\int \lim_{n\to\infty} f_n \, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int f_n \, d\mu$$

2.) $f_1(3) > f_2(3) \Rightarrow f_n$ n'est pas croissante

$f_1(3) = -\frac{23}{36} \approx -0,63$

$f_2(3) = -\frac{47}{63} \approx -0,74$

$$\left|\frac{n^2-27n+k}{k+n^2}\right| = \left|\frac{(k+n^2)-27n}{k+n^2}\right| = \left|1-\frac{27n}{k+n^2}\right| \leq 1+\frac{27n}{k+n^2} \leq 1+27\cdot\underbrace{\frac{n}{k+n^2}}_{\leq 1} \leq 28$$

Δ-inégalité

Plus petit le denominateur, plus grand la fraction.

Exercice 2

Soit l'espace mesuré $(\mathbb{N}^*, \mathcal{P}(\mathbb{N}^*), \mu_C)$ (mesure de comptage). On considère les fonctions $f(k) = \frac{1}{k^2}$ et pour tout $n \geq 0$ et pour n entier, $f_n(k) = \frac{n^2-27n+k}{(k+n^2)k^2}$

1. *On considère k fixé, montrer que la suite $f_n(k) \to f(k)$ quand $n \to +\infty$. Interpréter ceci en termes de convergence simple.*
2. *La suite (f_n) est elle croissante ?*
3. *Montrer qu'il existe M tel que pour tout $(n,k) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$*

$$\left|\frac{n^2 - 27n + k}{(k+n^2)}\right| \leq M$$

4. *En déduire que l'on peut appliquer le théorème de convergence dominée et en déduire que*

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{n^2-27n+k}{(k+n^2)k^2} \to_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \qquad (1)$$

$0 \in \mathbb{N}^* = \mathbb{N}\setminus\{0\}$

$\mu_c(\{1,2,100\}) = 3$

$\mu_c(\{4,5\}) = 2$

$$\int_{\mathbb{N}^*} \left(\frac{1}{2}\right)^k \mu_c(dk) = \int_{\mathbb{N}^*} \lim_{M\to\infty} \sum_{m=1}^{M} \left(\frac{1}{2}\right)^m \cdot \underbrace{\mathbb{1}_{\{m\}}(k)}_{=\begin{cases}1 & \text{si } k=m \\ 0 & \text{sinon}\end{cases}} \mu_c(dk)$$

Beppo-Lévi

$$= \lim_{M\to\infty} \int_{\mathbb{N}^*} \sum_{m=1}^{M} \left(\frac{1}{2}\right)^m \cdot \mathbb{1}_{\{m\}}(k)\, \mu_c(dk) =$$

$$\int \sum_i a_i \mathbb{1}_{A_i}\, d\mu = \sum a_i \mu(A_i)$$

$$= \lim_{M\to\infty} \sum_{m=1}^{M} \underbrace{\mu_c(\{m\})}_{=1} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^m = \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^m = \dots$$

$\forall q \in \mathbb{C}$ avec $|q|<1$:

$$\sum_{m=0}^{\infty} q^m = \frac{1}{1-q}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{n^2-27n+k}{(k+n^2)\cdot k^2} = \int_{\mathbb{N}^*} f_n(k)\, \mu_c(dk)$$

Démonstration :

$$\int_{\mathbb{N}^*} f_n(k)\, \mu_c(dk) = \int_{\mathbb{N}^*} \lim_{M\to\infty} \sum_{m=1}^{M} f_n(m) \cdot \mathbb{1}_{\{m\}}(k)\, \mu_c(dk)$$

Beppo-Lévi

$$= \lim_{M\to\infty} \int_{\mathbb{N}^*} \sum_{m=1}^{M} f_n(m) \cdot \mathbb{1}_{\{m\}}(k)\, \mu_c(dk)$$

$$= \lim_{M\to\infty} \sum_{m=1}^{M} f_n(m) \cdot \underbrace{\mu_c(\{m\})}_{=1} = \sum_{m=1}^{\infty} f_n(m) = \sum_{k=1}^{\infty} f_n(k) \checkmark$$

Théorème de convergence dominée

$f_n \to f$

$\exists g \in \mathcal{L}^1 : |f_n| \leq g$ (majorant) $\forall n \in \mathbb{N}$

$$\int \lim_{n\to\infty} f_n\, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int f_n\, d\mu$$

Exercice 2

Soit l'espace mesuré $(\mathbb{N}^*, \mathcal{P}(\mathbb{N}^*), \mu_C)$ (mesure de comptage). On considère les fonctions $f(k) = \frac{1}{k^2}$ et pour tout $n \geq 0$ et pour n entier, $f_n(k) = \frac{n^2-27n+k}{(k+n^2)k^2}$

1. *On considère k fixé, montrer que la suite $f_n(k) \to f(k)$ quand $n \to +\infty$. Interpréter ceci en termes de convergence simple.*
2. *La suite (f_n) est-elle croissante ?*
3. *Montrer qu'il existe M tel que pour tout $(n,k) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$*

$$\left|\frac{n^2-27n+k}{(k+n^2)}\right| \leq M$$

4. *En déduire que l'on peut appliquer le théorème de convergence dominée et en déduire que*

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{n^2-27n+k}{(k+n^2)k^2} \quad \text{[redacted]} \qquad (1)$$

$$\|$$

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{N}^*} f_n(k)\, d\mu_C(k) = \int_{\mathbb{N}^*} \overbrace{\lim_{n\to\infty} f_n(k)}^{= f(k) = \frac{1}{k^2}} \, d\mu_C(k) = \int_{\mathbb{N}^*} \frac{1}{k^2}\, d\mu_C(k) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$$

Théorème de convergence dominée

$$|f_n(k)| \leq \left| \overbrace{\frac{n^2-27n+k}{k+n^2}}^{\leq 28} \cdot \frac{1}{k^2} \right| \leq \frac{28}{k^2} \in \mathcal{L}^1$$

$$\int_{\mathbb{N}^*} \frac{28}{k^2}\, d\mu_C(k) = 28 \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} < \infty$$

$$\boxed{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^s} < \infty \iff s > 1}$$

$k=1$

x^3, e^x mésurable, parce que continue

$\mathbb{1}_{\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}}$ mésurable, parce que étagée, parce que $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, parce que $\mathbb{Q} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$

$\mathbb{Q} = \{q_1\} \cup \{q_2\} \cup \{q_3\} \cup \ldots$

Exercice 1

On considère f une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = e^x + x^3\mathbf{1}_{\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}}$ puis $g(x) = f(x)\mathbf{1}_{]a,b]}$

1. *Montrer que f est mesurable pour la tribu de Lebesgue.*
2. *Montrer que f n'est pas intégrable pour la tribu de Lebesgue et la mesure de Lebesgue. $(f \notin \mathcal{L}^1((\mathbb{R}, \mathcal{L}(\mathbb{R}), \lambda), (\mathbb{R}, \mathcal{L}(\mathbb{R}))$.*
3. *Montrer que g intégrable pour la tribu de Lebesgue et la mesure de Lebesgue. $(g \in \mathcal{L}^1)$.*
4. *En utilisant une fonction h judicieusement choisie telle que $h = g$ λ-presque partout, calculer $\int_{\mathbb{R}} g\, d\lambda$.*

$$\mathcal{L}(\mathbb{R}) = \delta(\{A \subseteq \mathbb{R} \mid A \text{ ouvert}\})$$

δ = mésure de Lebesgue

$$\{A \subseteq \mathbb{R} \mid \exists B \in \mathcal{L}(\mathbb{R}) : A \subseteq B \text{ et } \delta(B) = 0\} \subseteq \mathcal{B}(\mathbb{R})$$

$\mathcal{B}(\mathbb{R})$ est la complémentation de $\mathcal{L}(\mathbb{R})$

Un ensemble qui est un sousensemble d'un ensemble qui a mésure 0, est encore dans la tribu de Borel

$$\mathcal{L}(\mathbb{R}) \subseteq \mathcal{B}(\mathbb{R})$$